IA : TAMBA — Cellule : Mathématiques

Lycée : Koumpentoum — Classe : $2^{nde}S$

Année : 2023-2024 — Chapitre : Vecteur et Barycentre

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1

ABC est un triangle quelconque

1) Construire M et N tel que

$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2) Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles.
3) Soit S et T les milieux respectifs de [BC] et [MN]. Démontrer que A, S et T sont alignés.

EXERCICE 2

Les questions sont indépendantes

1) Simplifier $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$
2) ABCD est un quadrilatère quelconque avec I et J les milieux respectifs de $[AB]$ *et* $[CD]$.

   Démontrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$
3) ABC est un triangle quelconque avec I milieu de [BC]. Prouver que pour tout point M du plan on a

   $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$

EXERCICE 3

Soit ABCD un parallélogramme. On note I le milieu du segment [AD] et J le milieu de [DC].

1. Placer le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AJ}$

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

3. Montrer que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}$

4. En déduire que les points I ,K et B sont alignés.

EXERCICE 4

On considère un triangle ABC. On désigne par P le milieu de$[AB]$, et par Q et R les points définis par : $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{RC} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.

1) Construire la figure.
2) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ *et* $\overrightarrow{PR}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
3) En déduire que les droites (PQ) et (PR) sont parallèles.

EXERCICE 5

Soit ABC un triangle.

1) Placer les points D et E définis par :
   $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
2) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
3) Montrer que les points A, D et E sont alignés.
4) Soit F le point défini par :
   $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Montrer que E est le milieu de $[AF]$.

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle, M et N les points définis

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC},$

$\overrightarrow{AN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *avec* $k \in IR$

1) Faire une figure pour k=2
2) Montrer que pour tout réel k les vecteurs

   $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires.*
3) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles

a) M=N b) BCNM est un parallélogramme

c) BCMN est un parallélogramme d) BC=MN.

EXERCICE 7

Soient ABC un triangle qui n'est ni isocèle, ni rectangle, A' milieu de $[BC]$, B' milieu de $[AC]$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

1. Placer le point H tel que
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2. Démontrer que
$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ *et* $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$. Que représente H pour le triangle ABC .

3. Quelle est la nature du quadrilatère $AHA'O$?

4. Démontrer que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (OH) et que
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$.

EXERCICE 8

ABCD est un trapèze tel que : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, k est un nombre réel et M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ se projette en K sur (AC) et en N sur (CD) parallèlement à (BC).

1) Montrer que $\overrightarrow{MK} = 2k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{NK} = (k-1)\overrightarrow{AD}$.
2) Déterminer le réel k pour que K soit le milieu de $[MN]$
3) puis pour que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

EXERCICE 9

Déterminer les réels a et b tels que le point G défini ci-dessous, soit le barycentre des points (A,a) et (B,b) :

1/ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{GA}$ 2/ $3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{GA} = \vec{0}$

3/ $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG}$ 4/ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$

EXERCICE 10

Soit ABC un triangle quelconque.

G= bar $\{(A,3);(B,3)\}$; E = bar $\{(B,3);(C,1)\}$

F = bar $\{(A,3);(C,1)\}$; I = bar $\{(A,3);(B,3);(C,1)\}$

1. Démontrer que :

a) A, I et E sont alignés.

b) B, I et F sont alignés.

c) C, I et G sont alignés.

2. Que peut-on en déduire pour les droites(AE), (BF) et (CG) ?

3. Soit E' = bar $\{(B,3);(C,-1)\}$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{E'G}$ et $\overrightarrow{GF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4. En déduire que E', F et G sont alignés.

5. Montrer Que les droites (EF) et (AB) sont parallèles

EXERCICE 11

ABC un triangle ; construire les points I, J et K définis par : I barycentre de
$(A,2)$ *et* $(B,2)$; *J barycentre de* $(A,1)$ *et* $(B,2)$;
K barycentre de $(C,1)$ *et* $(B,-4)$

1) Démontrer que B est le barycentre de (K, 3) et (C, 1).
2) Quel est le barycentre de (A, 2) (K, 3) et (C, 1).
3) En déduire que I, J et K sont alignés et que J est le milieu de [IK] .
   1) Soit G centre de gravité de ABC. L milieu de [CI] et M celui de [KC]. Démontrer que IJML est un parallélogramme de centre G.

EXERCICE 12

Construire un triangle ABC tel que AB=6cm, AC=5cm et BC=4cm puis placer G barycentre de (A,1) (B,2) et (C,1)

1) Déterminer et représenter l'ensemble des points tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AC$
2) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\|$
   a) Montrer que $B \in (E)$.
   b) Déterminer et représenter (E)
3) Construire le point H barycentre de (A,3) et (C,1).
4) Construire l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$

EXERCICE 13

Soit A,B et C trois points non alignés

1) Montrer que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M
2) Placer le point D tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$.
3) Construire les points E,Fet G définis par E barycentre de (B,2) (C,-1) ; F barycentre de (A,1) (C,1) ; G barycentre de (A,1) (B,-2).
4) Montrer que : $\vec{u} = -\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{CG}$

EXERCICE 14

Soit ABC un triangle

I barycentre de (A,3) (B,2) ; J barycentre de (B,2) (C,-4)

et K barycentre de (A,3) (C,4)

1) Placer les points I,J et K.

2) Montrer que C est isobarycentre de B et J. En déduire que K est barycentre de (A,3) (B,2) et (J,2) puis les points I,J et K sont alignés.

EXERCICE 15

Soit ABC un triangle .Pour tout réel m on note G_m barycentre de (A, m) (B,2m) (C,1)

1) Pour quelles valeurs de m le point G_m existe-t-il
2) Soit D barycentre de (A,1) (B,2)
   a) Démontrer que G_m (m différent de 0) est un point de (CD).
   b) Pour quelles valeurs de m, G_m est un point de [CD]

AU TRAVAIL !!!